5.5 O Teorema Fundamental do Cálculo

Das propriedades de limite e da definição de integral definida, tem-se que uma função f é integrável num intervalo $[a, b]$, então o valor da integral é único. Logo, $\int_a^x f(t)dt$ define uma função F com domínio $[a, b]$, cujo valor funcional é dado por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Essa ideia leva ao próximo resultado.

Teorema 5.5.1 ***Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo:*** *Seja f é uma função contínua em $[a, b]$ e seja x qualquer número em $[a, b]$. Se F é a função definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

então,

$$F'(x) = f(x).$$

Além disso, se $x = a$ então, F' é a derivada à direita de f; se $x = b$ então, F' é a derivada à esquerda de f.

Demonstração: Seja x_1 e $x_1 = \Delta x$ números em $[a, b]$. Então $F(x_1) = \int_a^{x_1}$ e $F(x_1 + \Delta x)f(t)dt = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt$. Assim,

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt =$$

$$= \int_{x_1}^{a} f(t)dt + \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)dt.$$

Do Teorema do valor médio para integrais, segue que existe um valor χ em $[x_1, x_1 + \Delta x]$, tal que $\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)dt = f(\chi)\Delta x$. Assim,

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(\chi)\Delta x \Rightarrow \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(\chi).$$

Calculando o limite quando Δx tende a zero, tem-se que:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\chi) = f(\chi).$$

Como $\chi \in [x_1, x_1 + \Delta x]$, segue que com $\Delta x to 0$, então $x_1 + \Delta x \to x_1$, pelo teorema do sanduíche, segue que $\lim_{\Delta x \to 0} f(\chi) = f(x_1)$. □

O primeiro teorema fundamental do cálculo diz que a integral definida $\int_a^x f(t)dt$, com limite superior variável x é uma antiderivada de f. Além disso, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.5.1 *Calcule cada uma das derivadas a seguir.*

1. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^3+1}dt;$

2. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_3^{x^2} \sqrt{\cos(t)}dt.$

Solução:

1. Como $f(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$, segue do teorema fundamenta do cálculo que

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3+1}dt = \frac{1}{x^3+1}.$$

2. Fazendo uma mudança de variável, onde $u = x^2$, segue que $du = 2xdx$. Aplicando a regra da cadeia, segue que:

$$\frac{d}{dx}\int_3^{x^2} \sqrt{\cos(t)}dt = \frac{d}{du}\left(\frac{du}{dx}\int_3^{u} \sqrt{\cos(t)}dt\right) = (2x)\sqrt{\cos(u)} =$$

$$= 2x\sqrt{\cos(x^2)}.$$

□

O Teorema fundamental do cálculo pode ser escrito de outra maneira, aqui chamado de Segundo Teorema Fundamental do Cálculo.

Teorema 5.5.2 ***Segundo Teorema Fundamental do Cálculo:*** *Seja f é uma função contínua em $[a, b]$ e seja g uma função tal que $g'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, ou seja, g é uma antiderivada de f para todo $x \in [a, b]$. Então,*

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a) = g(x)\,\Big|_a^b .$$

Se $x = a$ então, g' pode ser uma derivada à direita de f e se $x = b$ então, g' pode ser uma derivada à esquerda de f.

Demonstração: Exercício. □

Agora, finalmente, pode-se fazer o cálculo de algumas integrais definidas.

Exemplo 5.5.2 *Calcule o valor de cada uma das integrais a seguir.*

1. $\displaystyle\int_1^3 xdx;$

2. $\displaystyle\int_1^3 x^2dx;$

3. $\displaystyle\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx;$

4. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}\right)dx;$

5. $\displaystyle\int_{0}^{2}(2x^2\sqrt{x^3+1})dx;$

6. $\displaystyle\int_{0}^{3}(x\sqrt{x+1})dx;$

7. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\cos(t)dt;$

8. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}sen^3(x)\cos(x)dx;$

9. $\displaystyle\int_{-3}^{4}|x+2|dx;$

Solução:

1. Tem-se que
$$\int_1^3 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 = \frac{3^2}{2}-\frac{1^2}{2} = 4.$$

2. Tem-se que
$$\int_1^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 = \frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}.$$

3. Tem-se que:
$$\int_{1/2}^4(x^3-6x^2+9x+1)dx = \int_{1/2}^4 x^3dx - 6\int_{1/2}^4 x^2dx + 9\int_{1/2}^4 xdx + \int_{1/2}^4 dx =$$
$$= \left.\frac{x^4}{4}\right|_{1/2}^4 - 6\left.\frac{x^3}{3}\right|_{1/2}^4 + 9\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1/2}^4 + x|_{1/2}^4 =$$
$$= \left(\frac{4^4}{4}-\frac{(1/2)^4}{4}\right) - 6\left(\frac{4^3}{3}-\frac{(1/2)^3}{3}\right) + 9\left(\frac{4^2}{2}-\frac{(1/2)^2}{2}\right) + \left(4-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(64-\frac{1}{64}\right) - 2\left(64-\frac{1}{8}\right) + 9\left(8-\frac{1}{8}\right) + \left(4-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= (64-128+72+4) - \left(\frac{1}{64}-\frac{1}{4}+\frac{9}{8}+\frac{1}{2}\right) = 12 - \frac{89}{64} = \frac{679}{64}.$$

4. Tem-se que
$$\int_{-1}^1\left(x^{\frac{4}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \int_{-1}^1 x^{\frac{4}{3}}dx + 4\int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}}dx = \left.\frac{x^{7/3}}{7/3}\right|_{-1}^1 + 4\left.\frac{x^{4/3}}{4/3}\right|_{-1}^1 =$$
$$= \left.\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}\right|_{-1}^1 + 4\left.\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}\right|_{-1}^1 = \frac{3}{7}\left(1^{7/3}-(-1)^{7/3}\right) + 3(1^{4/3}-(-1^{4/3})) = \frac{6}{7}.$$

5. Tem-se que: considerando $u = x^3 + 1$, segue que $du = 3x^2 dx \Rightarrow \dfrac{du}{3}$. Além disso, sendo $0 \leq x \leq 2$, segue que $1 < u < 9$, já que a função é contínua e se $x = 0$ então $u = 0^3+1 = 1$ e se $x = 2$ então $u = 2^3+1 = 9$. Consequentemente,

$$\int_0^2 (2x^2\sqrt{x^3+1})dx = 2\int_0^2 \sqrt{x^3+1}(x^2dx) = 2\int_1^9 \sqrt{u}\frac{du}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^9 \sqrt{u}du = \frac{2}{3} \times \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^9 = \frac{4}{9}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{4}{9}(27-1) = \frac{104}{9}.$$

6. Considerando $u = x + 1$, então $du = dx$ e $x = u - 1$. Além disso, como $0 \leq x \leq 3$, segue que $1 \leq x \leq 4$. Assim,

$$\int_0^3 (x\sqrt{x+1})dx = \int_1^4 (u-1)\sqrt{u}du = \int_1^4 u\sqrt{u}du - \int_1^4 \sqrt{u}du =$$

$$= \int_1^4 u^{\frac{3}{2}}du - \int_1^4 u^{\frac{1}{2}}du = \left.\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_1^4 - \left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 = \frac{2}{5}\left(\sqrt{4^5} - \sqrt{1^5}\right) - \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) =$$

$$= \frac{62}{5} - \frac{14}{3} = \frac{186-70}{15} = \frac{116}{15}.$$

7. Tem-se que

$$\int_0^{\pi/2} \cos(t)dt = sen(t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0) = 1.$$

8. Considere $u = sen(x)$. Dessa forma, segue que $du = \cos(x)dx$ e, como $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, segue que $0 = sen(0) \leq u \leq sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. Assim,

$$\int_0^{\pi/2} sen^3(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^3du = \left.\frac{u^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1^4 - 0^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

9. Para esse exemplo, tem-se que:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & se \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & se \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Assim, sendo $f(x) = x+2$, segue que $f(x) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Consequentemente, tem-se que

$$|x+2| = |f(x)| = \begin{cases} x+2 & se \quad x \geq -2 \\ -x-2 & se \quad x < -2 \end{cases}.$$

Sendo $-3 \leq x \leq 4$, segue que

$$\int_{-3}^4 |x+2|dx = \int_{-3}^{-2} |x+2|dx + \int_{-2}^4 |x+2|dx =$$

$$= \int_{-3}^{-2}(x+2)dx+\int_{-2}^{4}(-x-2)dx = \left(-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-3}^{-2}+\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{4} =$$

$$= \left[-\left(\frac{(-2)^2-(-3)^2}{2}\right)-(2(-2)-2(-3))\right]+$$

$$+\left[\left(\frac{(4)^2-(-2)^2}{2}\right)+(2(4)-2(-2))\right] =$$

$$= \frac{5}{2}-2+6+12 = 16+\frac{5}{2} = \frac{37}{2}.$$

□

Agora será utilizado os conhecimentos adquiridos para encontrar a área de regiões planas. A maior dificuldade que pode ser observada está com a construção da região. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.5.3 *Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo x.*

Solução: A curva y é uma parábola, com concavidade voltada para baixo ($a < 0$). Além disso, como o coeficiente b (coeficiente que multiplica o termo x) vale zero, tem-se que o vértice da parábola, x_{ver} está sobre o eixo y e, consequentemente, $y_{ver} = f(x_{ver}) = f(0) = 4$. Portanto, um esboço do gráfico da função fica dado pela Figura 5.5.

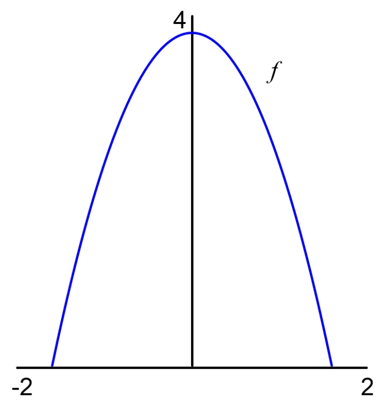

Figura 5.5: Esboço do gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$.

Como $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$, segue que a curva intersepta o eixo x nos pontos $x = -2$ e $x = 2$. Assim, o valor da área A entre a curva y e o eixo x fica dada por:

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(4\times 2-\frac{2^3}{3}\right)-\left(4\times(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right) = 8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3} = \frac{32}{3}\ u.a..$$

□

Exemplo 5.5.4 *Encontre a área da região limitada pela curva $y = x^2 - 4x$, pelo eixo x e pelas retas $x = 1$ e $x = 3$.*

Solução: A função f é uma parábola, com concavidade voltada para cima, o x do vértice é dado por $x_{ver} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2} = 2$. Logo, $y_{ver} = f(x_{ver}) = 2^2 - 4 \times 2 = -4$. Assim, um esboço do gráfico da função f fica dada pela Figura 5.6.

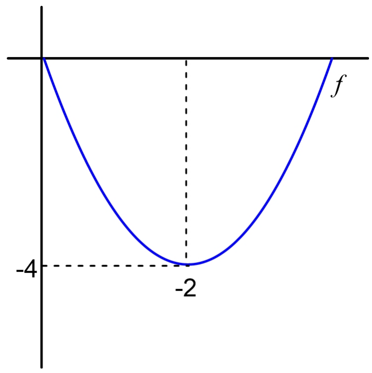

Figura 5.6: Esboço do gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x$.

Para essa função é importante observar que a região é limitada acima pelo eixo x e abaixo pela curva y. Da definição de área por integral, segue que o cálculo é feito com esses limites invertidos e, para isso acontecer, é necessário multiplicar a função por -1. Dessa forma, segue que

$$A = \int_1^3 (-(f(x)))dx = \int_1^3 (4x - x^2)dx = \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{4 \times 3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(\frac{4 \times 1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) = 18 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{22}{3}\ u.a..$$

□

Exemplo 5.5.5 *Encontre a área da região, no primeiro quadrante, limitada pelas curvas $y = x\sqrt{x^2 + 5}$, o eixo x e a reta $x = 2$.*

Solução: Como $f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$, segue que

$$f'(x) = (x)'\sqrt{x^2 + 5} + x(\sqrt{x^2 + 5})' = \sqrt{x^2 + 5} + x \times \frac{(x^2 + 5)'}{2\sqrt{x^2 + 5}} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 5} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{(\sqrt{x^2 + 5})^2}{\sqrt{x^2 + 5}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}} = \frac{2x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

Portanto, tem-se que a derivada da função f é positiva, para todo x. Logo, f não possui pontos críticos e, além disso, pelo teste da primeira derivada segue que a função f é sempre crescente.
Agora, como $f''(x) = (f'(x))'$, segue que

$$f''(x) = \left(\frac{2x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 5}}\right)' = \frac{(2x^2 + 5)'\sqrt{x^2 + 5} - (2x^2 + 5)(\sqrt{x^2 + 5})'}{(\sqrt{x^2 + 5})^2} =$$

$$= \frac{4x\sqrt{x^2+5} - (2x^2+5)\dfrac{(x^2+5)'}{2\sqrt{x^2+5}}}{(x^2+5)} = \frac{\dfrac{4x(\sqrt{x^2+5})^2 - 2x^3+5x}{\sqrt{x^2+5}}}{(x^2+5)} =$$

$$= \frac{4x^3+20x-2x^3-5x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}} = \frac{4x^3+15x}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}},$$

que é um número positivo, para todo x positivo. Então, pelo teste da segunda derivada, segue que a função f tem concavidade voltada para cima. Assim, um esboço do gráfico de f, no primeiro quadrante, fica dado pela Figura 5.7. Portanto, a área A da região fica dada por:

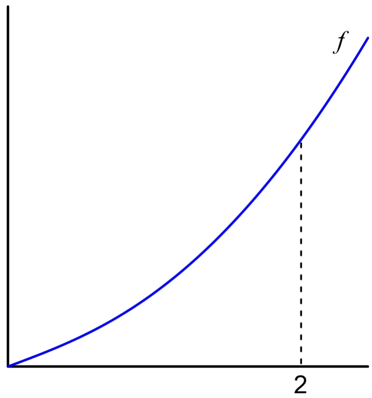

Figura 5.7: Esboço do gráfico da função $f(x) = x\sqrt{x^2+5}$ no primeiro quadrante.

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x\sqrt{x^2+5}dx.$$

Considere $u = x^2+5$. Então, tem-se que $du = 2xdx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = xdx$ e, além disso, para $x = 0$, segue que $u = 0^2+5 = 5$ e para $x = 2$ segue que $u = 2^2+5 = 9$. Portanto,

$$A = \int_5^9 \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_5^9 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{9^3} - \sqrt{5^3}\right) = \frac{1}{3}(27-5\sqrt{5})\ u.a..$$

□

Exemplo 5.5.6 *Encontre a área da região limitada pela curva $y = sen(x)$ e pelo eixo x, entre as retas $x = 0$ e $x = 2\pi$.*

Solução: A curva y é uma senoide, que pode ser vista na Figura 5.8.
A região R pode ser dividida em duas partes: a primeira, onde a curva y está acima do eixo x, com $0 \leq x \leq \pi$, e a segunda onde a curva y está abaixo do eixo x, com $\pi \leq x \leq 2\pi$. Assim, segue que a área A fica dada por:

$$A = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} sen(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} -sen(x)dx =$$

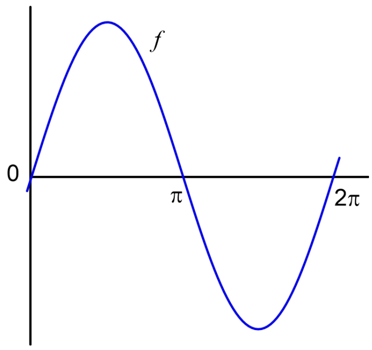

Figura 5.8: Esboço do gráfico da curva $y = sen(x)$.

$$= -\cos(x)|_0^{\pi} - (-\cos(x))|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos(\pi) - \cos(0)) + (\cos(2\pi) - \cos(\pi)) =$$
$$= -(-1-1) + (1-1) = 2 + 2 = 4 \ u.a..$$

□

Para os próximos exemplos, é necessário desenvolver uma nova ideia. Considere duas curvas contínuas, f e g, ambas definidas em $[a, b]$, tais que $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Deseja-se encontrar a área entre essas duas curvas. Tem-se que a área abaixo da curva f e da curva g, respectivamente, entre as retas $x = a$ e $x = b$ e o eixo x são dadas por

$$A_f = \int_a^b f(x)dx \ \ eA_f = \int_a^b g(x)dx.$$

Como a área definida pela curva f é maior ou igual a área definida pela curva g, segue que a área resultante fica dada por:

$$A = A_f - A_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Exemplo 5.5.7 *Encontre a área da região limitadas pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4x - x^2$.*

Solução: Primeiro é necessário encontrar os pontos de intersecção, pois eles darão os limites de integração. Os pontos de intersecção são os pontos onde as curvas são iguais, ou seja, são os pontos onde $x^2 = 4x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$. Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = 4x - x^2$. A curva f é uma parábola com concavidade voltada para cima e g tem a concavidade voltada para baixo. Além disso, se $x = 0$, então $g(0) = f(0) = 0$ e se $x = 2$, então $g(2) = f(2) = 4$. Assim, um esboço da região fica dada pela Figura 5.9.
No intervalo de estudo, segue que $g(x) \geq f(x)$ e, por isso,

$$A = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 [(4x - x^2) - (x^2)]dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)dx =$$

$$= \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(\frac{4 \times 2^2}{2} - \frac{2 \times 2^3}{3}\right) - \left(\frac{4 \times 0^2}{2} - \frac{2 \times 0^3}{3}\right) =$$

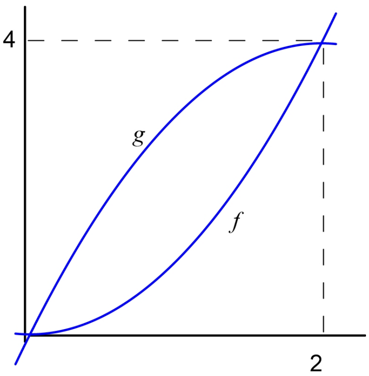

Figura 5.9: Esboços dos gráficos das curvas $f(x) = 4x - x^2$ e $g(x) = x^2$.

$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}\ u.a..$$

$\square$

Exemplo 5.5.8 *Encontre a área da região limitada pelas curvas* $y^2 = 2x - 2$ *e a reta* $y = x - 5$.

Solução: É comum pensar sempre numa equação de curva como sendo em função de x, ou seja, a curva é dada por $y = f(x)$. Contudo, é possível, quando for mais prático, tomar a curva em função de y.Para esse caso em estudo, como $y^2 = 2x - 2$, então é possível considerar a função $f(y) = x = \dfrac{y^2+2}{2}$ e como $y = x - 5$, pode-se considerar a função $g(y) = x = y + 5$. Os pontos de intersecção dessas curvas são obtidos igualando as equações, ou seja, $\dfrac{y^2+2}{2} = y + 5 \Leftrightarrow y^2 + 2 = 2y + 10 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ ou $y = 4$.
Logo, a região R entre as curvas pode ser observada na Figura 5.10.

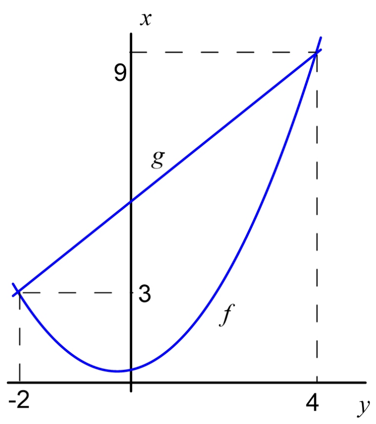

Figura 5.10: Esboço das curvas $f(y) = \dfrac{y^2+2}{2}$ e $g(y) = y + 5$.

Assim, segue que a área entre as curvas fica dada por:

$$A = \int_{-2}^{4} [g - f](y)dy = \int_{-2}^{4} \left((y+5) - (\frac{y^2+2}{2}) \right) dy =$$

$$= \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^2}{2} + y + 4 \right) dy = \left(-\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y \right) \Big|_{-2}^{4} =$$
$$= \left(-\frac{4^3}{6} + \frac{4^2}{2} + 4 \times 4 \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{6} + \frac{(-2)^2}{2} + 4(-2) \right) =$$
$$= -\frac{32}{3} + 8 + 16 - \frac{4}{3} - 2 + 8 = 18\ u.a..$$

□

Exemplo 5.5.9 *Encontre a área da região limitada pelas curvas* $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ *e* $y = x^2 - 4x$.

Solução: Os pontos de intersecção dessas curvas são obtidos igualando as duas equações. Dessa forma, tem-se que $x^3 - 6x^2 + 8x = x^2 - 4x \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 7x + 12) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = 4$.
Considerando $f(x) = x^2 - 4x$, segue que f é uma parábola, com concavidade voltada para cima, o vértice é dado pelo ponto $V = (2, -4)$. Para a função $g(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ é necessário fazer o esboço do gráfico.
Como $g'(x) = 3x^2 - 12x + 8$, segue que $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1.42$ ou $x_2 = x_1 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3.152 - ()$. Então, tem-se que se $x < x_1$ ou $x > x_2$ então $g'(x) > 0$; e se $x_1 < x < x_2$, segue que $g'(x) > 0$. Portanto, o ponto x_1 é um ponto de máximo local e o ponto x_2 é um ponto de mínimo local. Ainda, tem-se que f é crescente antes de x_1, é decrescente entre x_1 e x_2; e volta a ser crescente depois de x_2.
Além disso, $g''(x) = (g'(x))' = (3x^2 - 12x + 8)' = 6x - 12$ e, consequentemente, segue que $g''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Assim, tem-se que se $x < 2$ então $g''(x) < 0$ e se $x > 2$ então $g''(x) > 0$. Portanto, $x = 2$ é um ponto de inflexão, para $x < 2$ a função tem concavidade voltada para baixo e para $x > 2$ a função tem concavidade voltada para cima. Com isso, um esboço das curvas pode ser visto na Figura .

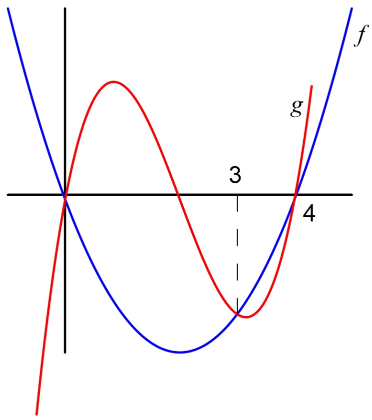

Figura 5.11: Esboço do gráfico das funções $f(x) = x^2 - 4x$ e $g(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

Observe que antes de $x = 3$, a função f assume valores maiores do que a função g e, por isso, $f(x) \geq g(x)$, para todo $0 \leq x \leq 3$. Portanto, a área dessa região é obtida fazendo $f - g$. Para valores entre 3 e 4, tem-se que $f(x) \leq g(x)$ e, por isso, a área dessa região é obtida fazendo $g - f$. Assim, a área total fica dada por:

$$A = \int_0^3 (f-g)(x)dx + \int_3^4 (g-f)(x)dx,$$

ou seja,

$$A = \int_0^3 \big((x^3 - 6x^2 + 8x) - (x^2 - 4x)\big)\, dx + \int_3^4 \big((x^2 - 4x) - (x^3 - 6x^2 + 8x)\big)\, dx =$$

$$= \int_0^3 \big((x^3 - 7x^2 + 12x\big)\, dx + \int_3^4 \big(-x^3 + 7x^2 - 12x\big)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 + \left(-\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 12\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_3^4 =$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 63 + 54\right) + \left[\left(-64 + \frac{448}{3} - 96\right) - \left(-\frac{81}{4} + 63 - 54\right)\right] =$$

$$= \frac{45}{4} - \frac{32}{3} + \frac{45}{4} = \frac{135 - 128 + 135}{12} = \frac{142}{12} = \frac{71}{6}\ u.a..$$

□

Agora, faça alguns exercícios para treinar.

5.6 Exercícios

Exercício 5.6.1 *Calcule o valor de cada uma das integrais abaixo.*

(a) $\int_2^5 4\, dx;$ **(b)** $\int_5^{-1} 6\, dx;$ **(c)** $\int_{-1}^2 x^2\, dx;$ **(d)** $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 1)\, dx;$

(e) $\int_2^{-3} (x-3)^3\, dx;$ **(f)** $\int_3^6 (x^2 - 2x)\, dx;$ **(g)** $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2}\, dx;$

(h) $\int_0^1 \frac{z}{(2z^2-5)^3}\, dx;$ **(i)** $\int_2^4 \sqrt{2x-4}\, dx;$ **(j)** $\int_{-2}^0 3x\sqrt{4-x^2}\, dx;$

(k) $\int_0^{\pi/2} sen(2x)\, dx;$ **(l)** $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3+1}\, dt;$ **(m)** $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}\, dx.$

Exercício 5.6.2 *Ache a área limitada pelas curvas dadas a seguir.*

1. $y = 4 - x^2$ *e o eixo* x;
2. $y = 4x - x^2$, *eixo* x *e as retas* $x = 1$ *e* $x = 3$;
3. $y = \sqrt{x+1}$, *eixo* x, *pelo eixo* y *e a reta* $x = 8$;
4. $y = |x-1| + 3$, *eixo* x *e as retas* $x = -2$ *e* $x = 4$;

5. $y = |x|$, $y = x^2 - 1$, *e as retas* $x = -2$ *e* $x = 3$;

Exercício 5.6.3 *Ache, por integração, a área do triângulo que tem por vértices os pontos* $(5, 1)$, $(1, 3)$ *e* $(-1, -2)$.

Exercício 5.6.4 *Ache, por integração, a área do trapézio que tem por vértices os pontos* $(-1, -1)$, $(2, 2)$, $(6, 2)$ *e* $(7, -1)$.

Exercício 5.6.5 *Ache a área da região limitada pela curva* $x^3 - x^2 + 2xy - y^2 = 0$ *e pela reta* $x = 4$.